안녕하세요. 수학 멘토 마타입니다. 이번 칼럼은 2016년 4.6에 치러진 고3 학평 가형에 대한 해설과 분석 및 앞으로 공부방법에 대해서 언급합니다.

단순 풀이 해설은 하지 않고 4점문제들에 대해 접근 방법을 제시하고 풀이 과정 중 막혔을 부분을 어떻게 풀어가야할지 써보도록 하겠습니다.(3점 문제들은 기본개념과 관련된 문제이니 틀린 학생들은 개념을 다시 보고 다시 접근하면 쉽게 풀릴 것입니다.)

15. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 반복할 때, 짝수가 적혀 있는 공을 모두 꺼내면 시행을 멈춘다. 5번째까지 시행을 한 후 시행을 멈출 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{6}{35}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{8}{35}$ ④ $\frac{9}{35}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

확률 문제이죠.

확률 문제 접근은 두가지로 볼 수 있는데요.
1.경우의수 (특정사건경우의수/전체사건의 경우의수)
2.정의

대부분의 확률문제는 경우의수로 접근합니다.
위 문제를 경우의수로 접근할 경우

전사건수(S)=${}_7P_5$가 되겠죠? (순서있게 7개의 공을1개씩 5번 뽑을테니깐요.)

이제 특정사건에 대한 이해가 필요합니다.

위 문제에서 특정사건에 대한 설명은 “짝수 공을 다 뽑는 순간 시행을 멈춘다.” 그리고 5번째 시행에서 멈출 사건을 구하는 것입니다.

위 사건을 표로 만들어 이해해보면 5번째에는 무조건 짝이 나와야하고 그전에 짝수 3개의 공이 나오면 안된다는 것입니다.

1	2	3	4	5
짝	짝	홀	짝 (시행종료)	

위 표처럼 짝수의 공이 5번째 시행전에 나오면 안됩니다.

1	2	3	4	5	6
짝	홀	홀	짝	홀	짝 (시행종료)

그렇다고 위표처럼 마지막 짝수공이 6,7번째 나와 종료되는 경우도 안되죠.

1	2	3	4	5
홀	짝	홀	짝	짝 (시행종료)

특정사건을 만족시키려면 마지막 3번째 짝수공이 5번째 나와야하고 그전 1~4번째 시행에선 짝수가 어떤 순서로 나오든 상관없습니다.

이젠 1~4번째 어떤 공이 들어가야할지에 대한 경우의수를 구하면 됩니다.

홀,짝에 대한 자리부터 정해보죠. 4개의 순서에서 2개는 짝 2개는 홀 수입니다.

그 경우의수는 조합의 개념으로 접근하면 됩니다. (${}_4C_2$)

이젠 완성된 짝, 홀 자리에 어떤 공이 올지에 대한 경우의수를 구하면됩니다. 순서가 있는 경우이므로

짝수공 배열 :${}_3P_3$ 홀수공 배열:${}_4P_2$

짝수공 배열에 대해 각각 홀수공배열이 생기고 이렇게 생긴 경우의수는 짝,홀 자리정하기 경우의수에 대해 각각 생기므로 연산은 곱하기를 해주면 됩니다.

이처럼 확률,경우의수 문제가 나올 경우 문제에 대한 이해도를 확실히 높여 정확한 상황을 그려낼 줄 알면 4점짜리 문제도 쉽게 풀 수 있습니다.

16. 함수 $f(x)=xe^{-2x+1}$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-a & (x>b) \\ 0 & (x\le b) \end{cases}$$

가 실수 전체에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [4점]

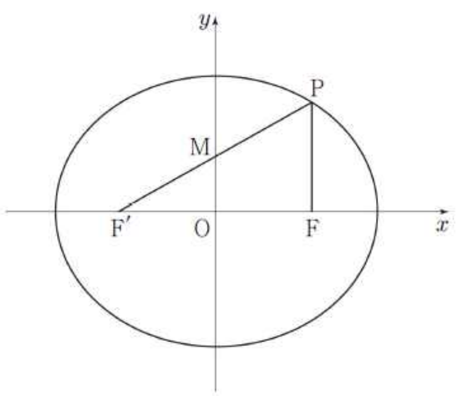
① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

미분가능성에 대한 기본적인 접근 방법은
1. 연속성
2. 미분계수의 존재 (좌=우 미분계수) 의 판단입니다.

위 문제는 기본적인 접근방법으로 접근하면 쉽게 풀립니다.

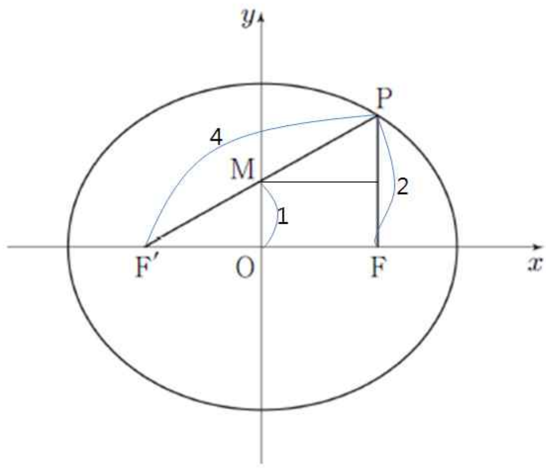
17. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 선분 PF′의 중점 M의 좌표가 (0, 1)이고 $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{PF}}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]



① 14 ② 15 ③ 16

④ 17 ⑤ 18

이차곡선에 대한 문제에서 가장 중요시 여겨야 할 것은 이차곡선에 대한 정의와 성질입니다. 이차곡선문제는 정의와 성질로부터 중요한 조건들이 제시되니깐 반드시 문제풀때, 정의와 성질을 활용하도록 연습하세요.



문제에서 중점 조건, 이차곡선의 정의를 이용해서 구한 수치를 도형에 넣었습니다. 위 수치를 이용해서 문제를 풀면 됩니다.

18. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t, \ln t)$, $\mathrm{Q}(2t, \ln 2t)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{R}(r(t), 0)$, $\mathrm{S}(s(t), 0)$이라 하자. 함수 $f(t)$를 $f(t)=r(t)-s(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 극솟값은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

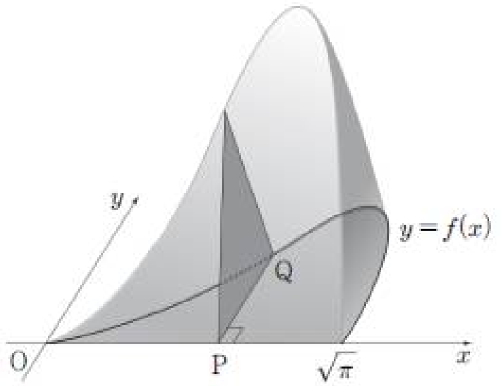
문제접근은 f(t)를 구하기 위해 R점과 S점을 구하겁니다.
거기서 접선의 방정식을 구해야하는데
접선의 방정식이 되는 일차방정식을 만드는데 필요한 조건은

1.기울기, 한 점 좌표
2.두 점의 좌표

입니다. 접선의 방정식을 구해 각 좌표를 구한 후 f(t)를 구합니다.

그다음 극소값을 구하는 방법대로 하면 됩니다.

19. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x(x^2+1)\sin(x^2)}$ $(0 \le x \le \sqrt{\pi})$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 두 점 $\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(x, f(x))$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면이 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형이다. 이 입체도형의 부피는? [4점]



① $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+2)}{8}$　② $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+3)}{8}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+4)}{8}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+2)}{4}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+3)}{4}$

넓이나 부피를 구하는 적분문제에서의 발상의 시작은

“무엇을 쌓아가서 면적,부피를 구하는가?/ 어디서부터 어디까지 쌓는것인가?”

입니다.

면적이면 선이니 선의 길이를 표현하여 적분하면 되는 것이고, 부피이면 넓이이니 넓이를 표현하여 적분하면 됩니다.

자, 위 문제는 부피 문제입니다. 그렇다면 면을 적분해 갈 것입니다. 그렇다면 어떤 면인가요? 정삼각형입니다. 그 정삼각형의 넓이는 어떻게 구하나요?

한변의 길이를 a라고 두었을 때 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$입니다. 위문제에서는 한변의 길이가 f(x)군요

그렇다면 우리가 쌓아가고자하는 면의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\{f(x)\}^2$입니다.

어디서부터 어디까지 쌓아가나요? 0부터 $\sqrt{\pi}$까지입니다.

위 내용을 종합하여 식을 세워보면

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{3}}{4}\{f(x)\}^2 dx$입니다.

자 근데 이 내용까지 하고 나서 틀린 학생들은 적분에서 틀렸겠군요.

이 문제에서 부분적분이 쓰인다는 내용은 위 내용까지 알아낸 학생이라면 누구나 알듯합니다.

하지만 부분적분에서 막혔겠죠.

부분적분에서 무엇을 미분하고 무엇을 적분할지에 대해서 정하는 것은 적분하여 반복되는 패턴이 되는 것을 우선적으로 적분합니다. 그래서 이상적인 풀이는 적분하고 난후 미분할 때 미분하는 쪽은 깔끔하게 없어지는 것이 흔히 하는 풀이죠.

이 문제는 그대로 두고 부분적분을 하면 꼬이게 됩니다.

x^2을 치환하여 풀이하여보세요.

이와같이 우리가 아는 형태로 풀리지않는 것은 변형하여 풀어보자라는 발상을 하면 좋습니다.

20. 주머니에 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 자연수 중 연속된 자연수의 최대 개수가 3인 사건을 A라 하자.

예를 들어  은 연속된 자연수의 최대 개수가 3이므로 사건 A에 속하고,  은 연속된 자연수의 최대 개수가 2이므로 사건 A에 속하지 않는다.

사건 A가 일어날 확률은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{11}{42}$
④ $\frac{13}{42}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

확률문제입니다. 접근은 경우의수로 합니다.

문제에서 <예를 들어>라는 표현이 나온다면 그 예시를 가지고 문제에 대해서 이해를 정확히 하셔야합니다.

예를 든 문제는 문제의 이해가 힘든 경우이거나 문제이해에 있어서 잘못 이해할 수 있는 것을 바로 잡아주기 위함입니다.

공을 5개 꺼냈을 때, 공에 적힌 수 중 연속된 자연수의 최대 개수가 3이라는 것은

적힌 수가 연달아 3번 연속되는 경우만 포함 하면 된다는 의미로 이해하면됩니다. 4번이나 5번연속해서도 안되고 2번만 연속해도 안됩니다. 무조건 3번연속돼야하고 이외에 2번연속되는 경우가 포함되더라도 신경 쓰지 않으면됩니다.

상황을 나눌 때 연속된 3개의 수를 먼저 정하고 나머지는 조합의 개념으로 접근하면 됩니다. 이때, 주의할 점은

3개의수를 정하고 나머지를 뽑아줄 때 그 뽑는 수가 연속된 3개의 수와 전, 후로 연속되지 않도록 뽑아줘야합니다.

21. 닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2 \le x \le 0) \\ -x+2 & (0 < x \le 2) \end{cases}$$

이다. 좌표평면에서 $k>1$인 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $g(k)$가 불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의 합은? [4점]

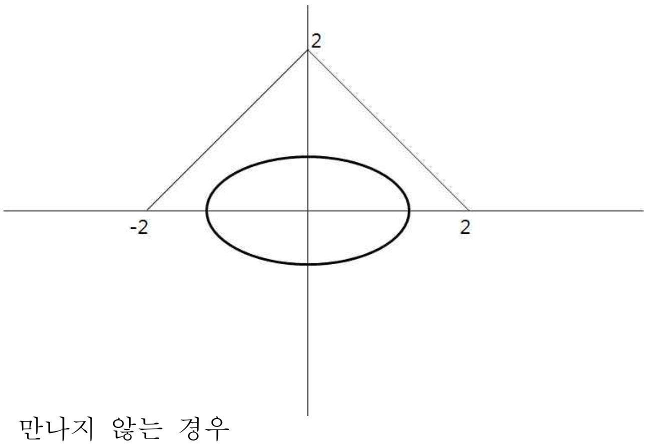
① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

기하문제입니다. 만나는 서로다른점의개수 문제.

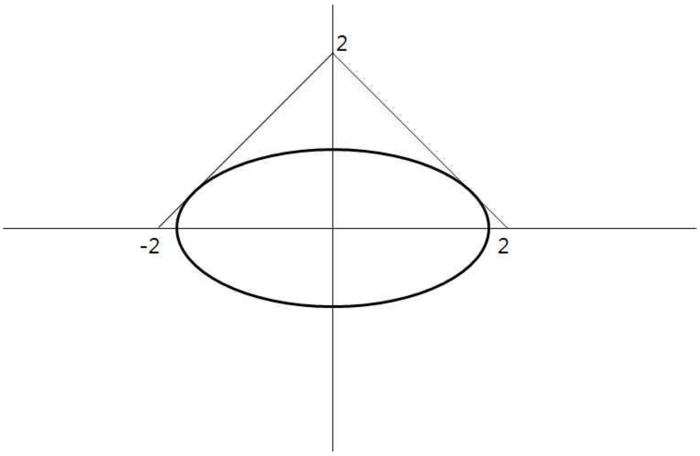
설마 수식으로만 접근하려고 한 학생은 없겠죠? 그렇게 접근하면 어려워집니다.

기하적으로 그래프를 그려서 k조건에 따라 g(k)그래프를 완성시키고 불연속되는 k값을 찾으면 됩니다.

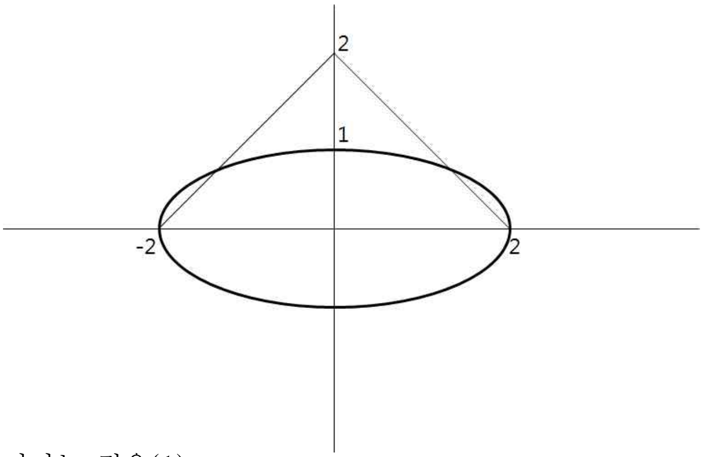
k값에 따라 그려 질 수 있는 그래프를 그려보면



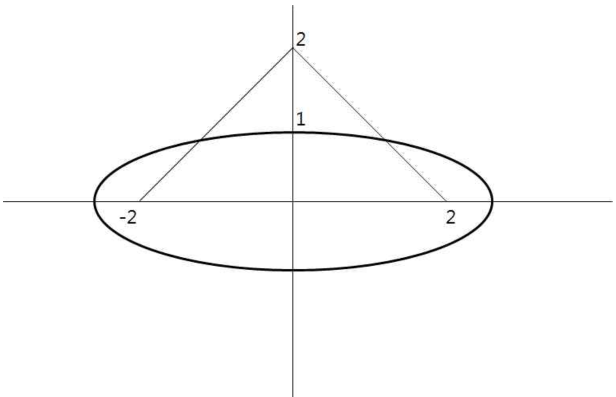
만나지 않는 경우



접하는 경우



만나는 경우(1)

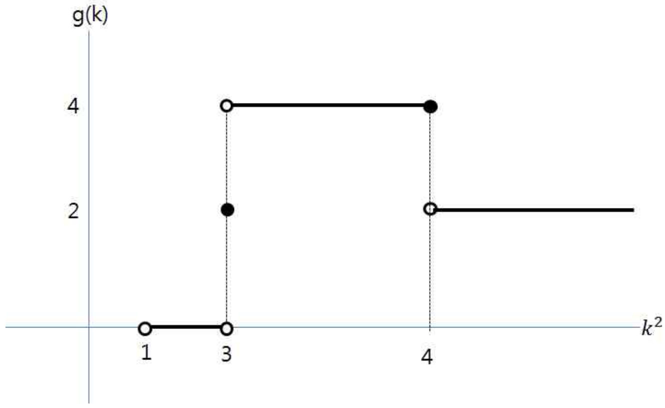


만나는 경우(2)

로 나누어 생각하면 됩니다.

각 그림조건에 맞게 식을 통해 k값 조건을 구해주면되구요.

그 k값에 따른 g(k)의 그래프 아래와 같이 나옵니다.



26. x에 대한 방정식 $\left|\cos x + \frac{1}{4}\right| = k$가 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 α라 할 때, 40α의 값을 구하시오. (단, $0 \le x < 2\pi$) [4점]

절대값이 나오는 문제는 접근이 3가지로 나뉩니다.
1.그래프 그려 꺾어올리기
2.구간나누어 부호결정하기
3.제곱하여 절대값 없애기

위 문제는 그래프 그려서 꺾어올리면 되는 문제입니다.

27. 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
(나) $0 \le x \le 1$일 때, $f(x)=\sin \pi x + 1$이다.
(다) $1 < x < 2$일 때, $f'(x) \ge 0$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = p + \frac{q}{\pi}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]

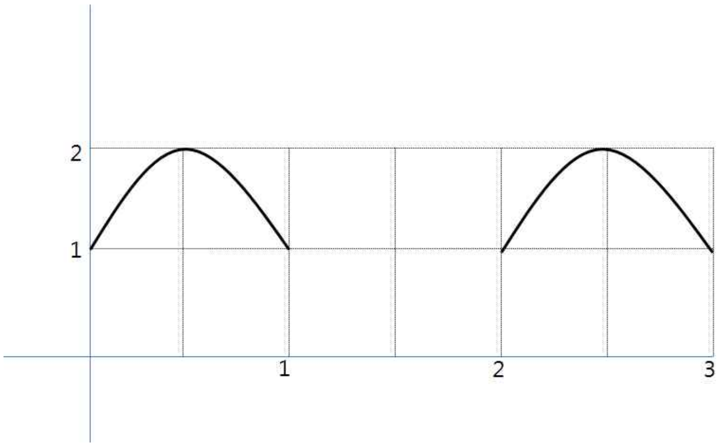
위 조건을 만족시키는 f(x)에 대한 그래프를 찾는 문제입니다.

(가)조건은 주기로 보아서 0부터 2사이 그래프가 반복된다는 조건으로 이해하면 됩니다.

(나)조건으로 0부터 1까지의 f(x)그래프를 그렸겠죠.

그다음 (다)조건을 보고 “그래 기울기가 양수이거나 0이라

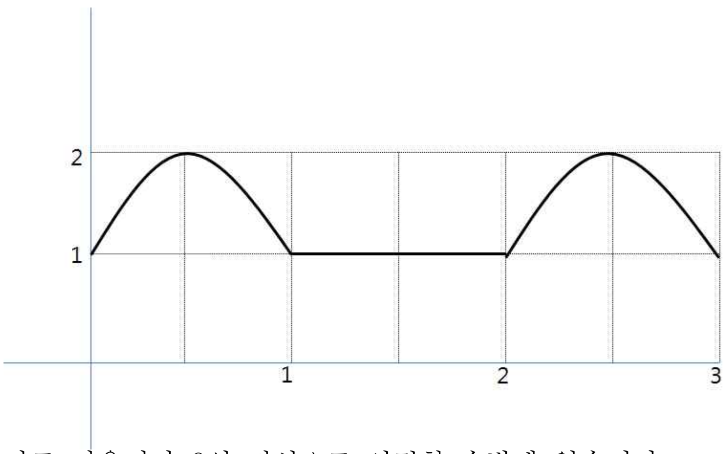
는 건 알겠는데 도대체 1부터 2사이 f(x)는 뭐지?” 라는 생각까지 하고 멈췄을 거에요. 자 그럼 주어진 조건까지해서 그래프를 그려보죠.



(나)조건을 이용해서 그리면 위와 같이됩니다.

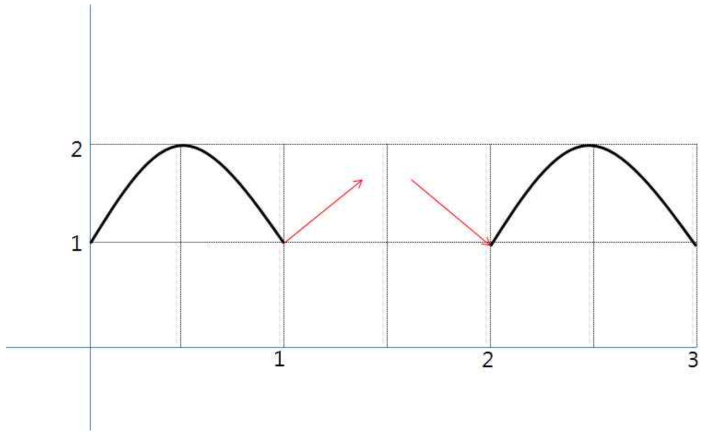
자 여기서 물어볼게요. 이제 1에서부터 2사이 그래프를 그려야하는데

연속하면서 (즉 끊김 없이 그리면서) 그리고 1과 2사이의 그래프 기울기가 항상 0보다 크거나 같게 그리려면 어떻게 해야할 까요?



바로 기울기가 0인 직선으로 연결할 수밖에 없습니다.

그렇다면 기울기가 양수인 그래프로 연결해보려고 해볼까요?



그래프가 위처럼 경계점에서 양수인 그래프를 그리고 다시 연결되게 하려면 내려가야합니다. 즉 기울기가 음수가 되어야하죠. 그렇게 되면 (나)조건에 위배가 되죠?

그렇기 때문에 (나)조건을 지키면서 1과 2사이를 채우려면 기울기가 0인 직선이 될 수밖에 없습니다.

이제 이해되셨죠?^^!!

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x+y+z+w=18$
(나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

경우의수 문제입니다.

경우의수나 확률 문제는 문제를 이해하는데 굉장히 집중해야해요. 이해를 하냐 못하냐가 문제를 푸는 발상을 할수있냐는데 주는 영향이 큽니다.

x,y,z,w 중 2개는 3a+1 의 꼴이 돼야하고 2개는 3b+2의 꼴이 돼야합니다.

이것을 정하는 경우의수가 ${}_4C_2$가 됩니다.

이후 특정하게 정해주죠.
x,y 가 나머지1 z,w가 나머지 2인경우를 두고 풀어나갑니다.

x:3a+1
y:3b+1
z:3c+2
w:3d+2 로 정하였습니다. 이제 a,b,c,d의 순서쌍 경우의수만 알면 x,y,z,w 의 순서쌍 경우의 수를 알게 되는 거네요.

x+y+z+w=18이니

3(a+b+c+d)+6=18
a+b+c+d=4입니다. (이때, a,b,c,d는 0이 될 수 있습니다.)

중복조합문제가 되었네요.

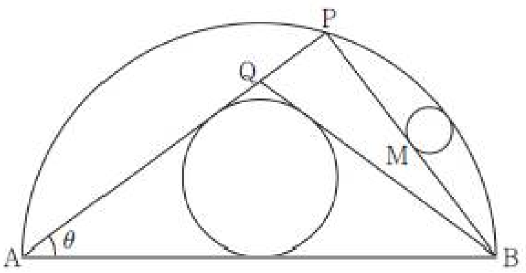
이 때 사탕4개를 4명의 학생에게 나누어주는 걸(중복허용)로 바꾸어 이해하여 식을 세우면

사탕 하나의 입장에선 4개의 선택 가짓수(학생 a,b,c,d)가 있고 그것을 4번 반복하여 선택하니깐

${}_4H_4$가 됩니다.

자 이제 답을 구해보면 위 x,y,z,w 의 나머지를 정하는 가짓수 각각에 대해 순서쌍 경우의수 ${}_4H_4$가 생기니깐 두 값을 곱해주면 됩니다.

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자. 선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고 호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



삼각함수 문제에서 자주 출제되는 도형 유형이죠.

이런 문제는 문제에서 요구하는 선의 길이,넓이 등을 θ를 이용해 표현하는 문제입니다. 표현한 후 문제는 극한 문제인데

극한문제는 극한값 풀이 유형대로 해주면됩니다.

도형에 대한 해석은 해설을 참고하세요^^

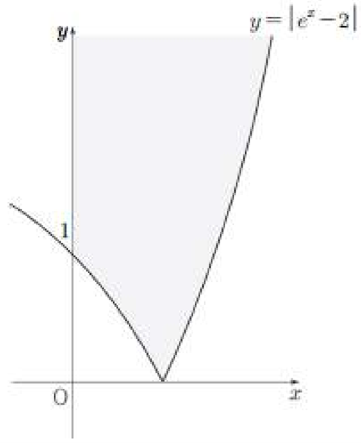
30. 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge |e^x-2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자. 양의 실수 t에 대하여 영역 D의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다.
(나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



오답률이 가장 높은 문제군요.

문제를 읽으면서 이해가 좀 힘들었을텐데 한번 천천히 이해해볼까요?

문제를 읽고 난 후에 저 색칠된 영역에 정사각형을 넣는다는 거는 이해하셨죠?

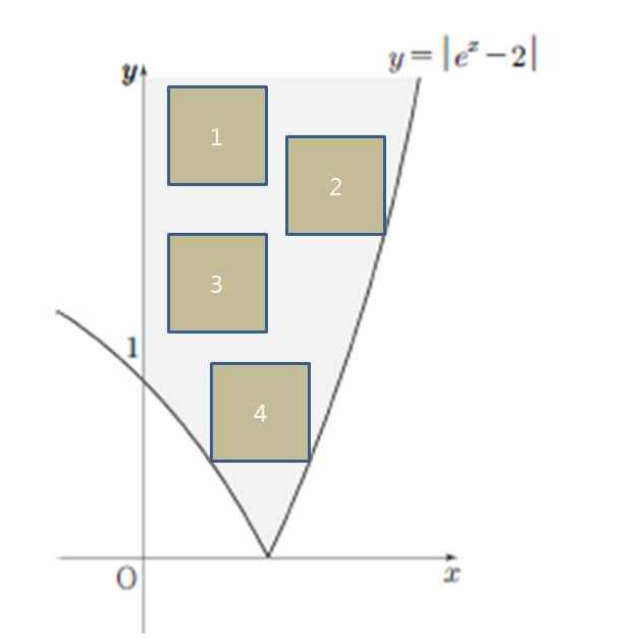
저 영역을 벗어나게 정사각형을 넣을 순 없는 거에요.

그리고 한변의 길이가 t이고 정사각형을 넣을 때는 딱 x축과 평하게 테트리스 느낌으로 넣어야하는 거에요.

그런 다음 그 정사각형의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟

값을 f(t)라한다는 데..... 도대체 무슨말이지~~!!!!!!!!

여기서부터 문제에 대한 이해가 살짝 꼬이기 시작한 학생들이 있을거에요. 한번 이해 해보도록 하죠.



길이가 같은 정사각형을 여러개를 그려서 저 영역안에 넣어봤어요.

자 여기서 질문! 두 대각선의 교점의 y좌표가 가장 작은 도형은 어떤 것일까요?

하자마자 4번이요. 라고 대답하겠죠.?

문제에서는 4번같은 위치를 다 찾으라는 말입니다.

한변의길이가 계속 변할 텐데 그 변하는 정사각형마다
테트리스 한다는 느낌으로 딱 아래로 붙였을 때 그 대각선의 교점의 y좌표를 표현해봐라 그것이 바로 f(t)다 라는 것이에요.

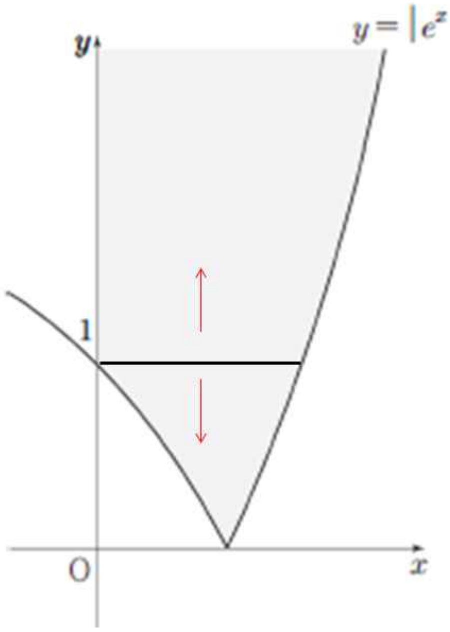
이해가셨나요?

만약 위 정사각형의 한변의 길이를 2라고 한다면
4번정사각형의 두 대각선 교점의 y좌표는 f(2)로 표현이된다는 것이고 이제 변수 t에 대하여 정사각형을 생각해서 저렇게 밑으로 테트리스 하듯이 붙였을 때 대각선의 교점의 y좌표를 t에 대해 표현하라 라는 말입니다.

그다음~ 여기까지 이해한 학생들은 그다음에서 막혔겠죠.

그 다음 생각을 한번 뚫어보죠.

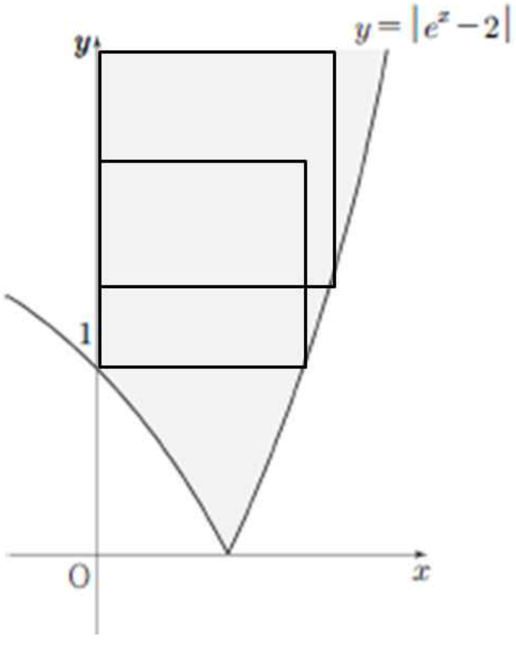
 이제 정사각형을 테트리스처럼 넣을 때 다르게 넣어지는 경우가 생기는데 이것을 나누어주면됩니다.



저 검은색 선을 기준으로 위, 아래로 나누어집니다.

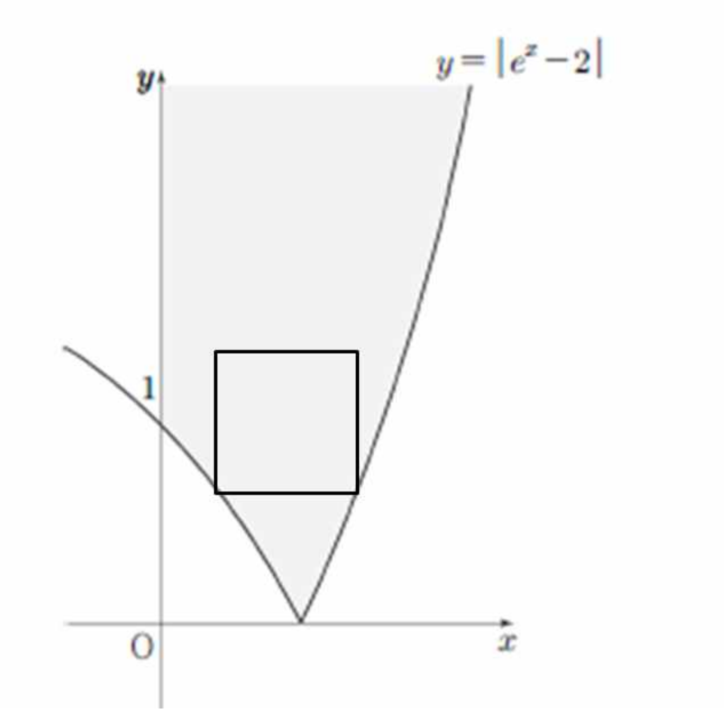
(샘 잠깐만요... 저희가 그걸 알면 저 문제를 풀었죠...)

네 ^^ 이해 시켜줄게요.



위 그림을 보세요. 한변의 길이가 t인 정사각형을 최대한 테트리스처럼 딱 밑에 붙이려면 y축에 붙은 상태로 쭉 내려가야합니다. 처음에 제시했던 검은색 기준으로 해서 위쪽은 한변의길이 t 자체가 오른쪽 아래 꼭지점의 x좌표가 되죠?

하지만



저 검은색 선 기준으로 아래쪽은 한변의 길이 t로 바로 꼭지점의 좌표를 구할 수 없습니다.

그래서 나누어 주는거에요.

이제 이해 했나요?

그다음은 왼쪽아래 꼭지점의 좌표를 미지수로 두고 오른쪽 아래 꼭지점을 t에 관해 잡고 대각선의 교점의 y좌표를 구해주면 그것이 f(t)가 됩니다.

이때 왼쪽아래 꼭지점의 미지수는 아래쪽 왼쪽과 오른쪽 꼭지점의 y좌표를 통해 t관한 식으로 표현가능합니다.

다음엔 f(t)의 도함수를 구하여 각 값을 대입하여 수치를 구해내면 되는 문제입니다.

어떤가요?

문제가 그렇게 어렵나요?

문제는 개념을 알고 모르고로 풀리고 안풀리고 할 수 도있지만 문제에 대한 이해도를 높이지 않는다면 개념을 알아도 풀지 못합니다.

이번 학평에서 틀렸던 문제들에서 어떻게 접근해야할지 또 막혔을 때 어떻게 생각해야할지 등을 칼럼으로 써보았습니다.

도움이 되셨겠죠? 도움이 됬다면 추천 잊지마세요.!!^^

<4학평에 대한 분석 및 이후 공부법>

수학에 있어서 풀이는 크게 나누면 두가지입니다.

1. 기하적 풀이
2. 수식적 풀이

위 풀이 중 기하적풀이가 좀 더 어렵게 다가옵니다. 이유는 많이 안해봐서 그렇죠.

역시나 오답률 5위까지 문제중 4문제가 기하적풀이로 접근하는 문제입니다. 이는 기하적인 연습이 안되어있다는 것이니 이후 공부할 때는 도형이나 그래프에 대한 추론연습을 많이 해보시길 바랍니다.

4월 학평에 대한 난이도는 몇 문제에서 킬러 문항이 있으나 다른 문제에서 난이도가 쉽게 되어서 그 시간이 남아 어려운 문제에 투자할 수 있어서 전체적으로 어려운 시험은 아니였습니다.

혹시나 성적이 원하는 만큼 나오지 않았더라두 이건 4월학평이니 공부에 더 열심히 집중하길 바랍니다.^^

중요한건 수능이니깐요. 4월 잘쳐도 수능에서 점수를 못받으면 소용없어요.

수학 멘토 마타였습니다. 질문은 쪽지나 댓글로 해주세요.^^