제2교시

2024학년도 SAJ 인재원 고2 학력평가 문제지

수학 영역

성명			수험 번호						2				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

가장 넓은 길은 언제나 내 마음속에

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

SAJ 인재원

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{16}}\right)^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+5x+2$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3. $\sum_{k=1}^{5}\left(2^k \times \sin\dfrac{k\pi}{2}\right)$의 값은? [2점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

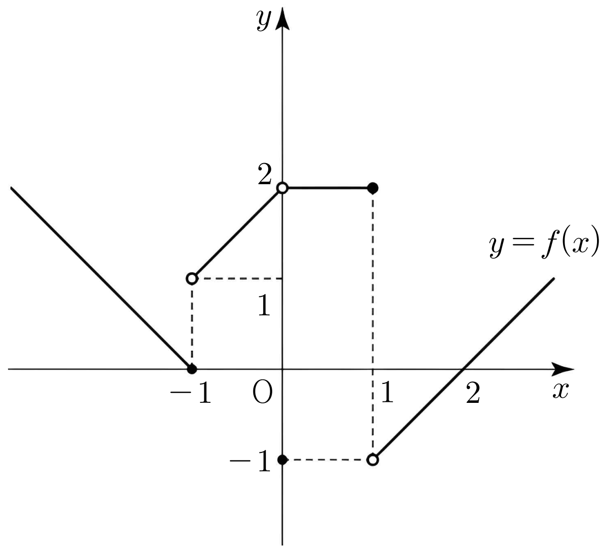
4. 첫째항이 -6이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_5|=|a_9|$$

일 때, a_{13}의 값은? [3점]

① 4 ② $\dfrac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\dfrac{11}{2}$ ⑤ 6

5. 함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



$\lim_{x\to 1+}(f\circ f)(x)+\lim_{x\to 0}f(x)$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

6. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $3\sin\theta=4\cos\theta$일 때,

$\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{5}$ ② $-\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{4}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

7. 상수 a에 대하여 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+1)-f(1)=x^2+ax$$

를 만족시킨다. $f'(1)=2$일 때, 점 $(a,\ f(a))$에서의 함수 $f(x)$의 접선의 기울기는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+3x+5}=2,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

일 때, $f(5)$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

9. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+4 & (a_n<10) \\ a_n-10 & (a_n\geq 10) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, a_5+a_{15}의 값은? [3점]

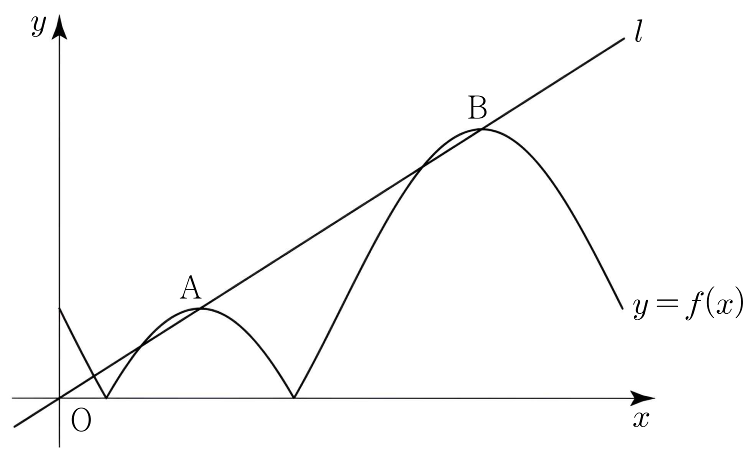
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10. 그림과 같이 곡선 $f(x)=|a\sin x-b|\,(0\leq x\leq 2\pi)$가 원점을 지나는 직선 l과 서로 다른 두 점

$$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{3\pi}{2},\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

에서 만난다. $f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=2$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이고 $a>0$, $b>0$) [3점]



① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

11. 둘레의 길이가 20인 삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}=64$이다. $\sin A+\sin B+\sin C$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

12. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}-3a_n)=0$$

을 만족시킨다. 어떤 자연수 m에 대하여 $a_m=72$일 때, 모든 a_{m+1}의 값의 합을 S라 하자. $m+S$의 값은? [3점]

① 360 ② 362 ③ 364 ④ 366 ⑤ 368

13. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x<a) \\ -x & (x \geq a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $(x-2a+1)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(2a)\times f(-a)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

14. 상수 p에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + b_n,\ \ \sum_{k=1}^{n} b_k = n^2 + pn$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(a_k b_k + p\right)$의 값은? [4점]

① 160 ② 165 ③ 170 ④ 175 ⑤ 180

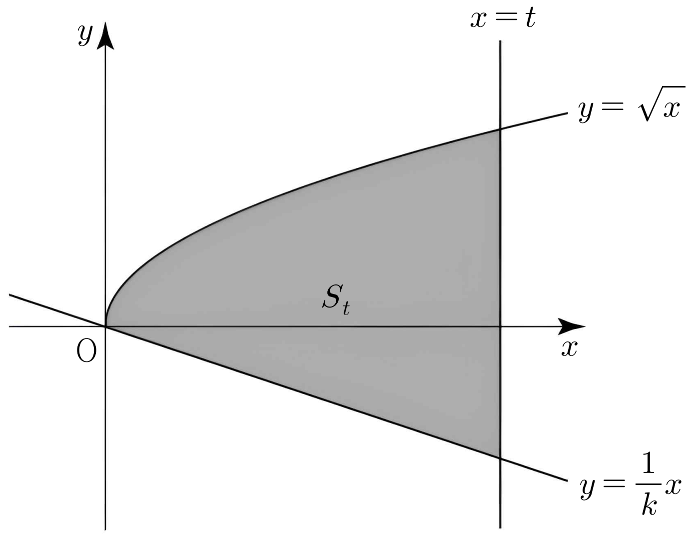
15. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 10이다.
(나) 삼각형 ABC의 세 변 중 한 변의 길이는 4이다.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이의 최솟값은? [4점]

① $\frac{19}{5}\pi$ ② $\frac{81}{20}\pi$ ③ $\frac{43}{10}\pi$ ④ $\frac{91}{10}\pi$ ⑤ $\frac{24}{5}\pi$

16. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$, 직선 $y=\frac{1}{k}x\,(k<0)$와 직선 $x=t\,(t>0)$로 둘러싸인 영역을 S_t이라 하자. 영역 S_t에 속하고 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점 중 y좌표가 최대인 점의 y좌표를 $f(t)$, y좌표가 최소인 점의 y좌표를 $g(t)$라 하자. $0<t<10$에서 함수 $f(t)+|g(t)|$가 불연속인 점의 개수가 4가 되도록 하는 정수 k의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, 영역 S_t는 경계선을 포함한다.) [4점]



① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

17. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $30 < a_1 < 50$
(나) $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = k$(k는 짝수인 상수)이다.

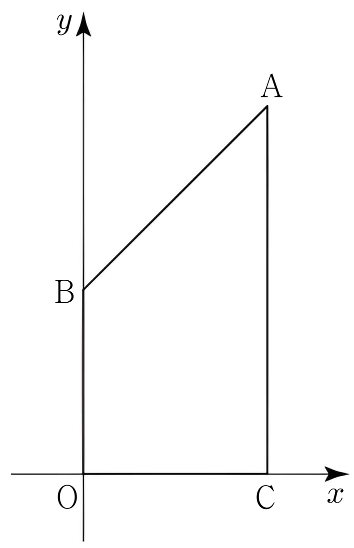
두 자연수 $p(p \neq 5,\ p \neq 7)$, $q(p < q)$가

$$\{n \mid |S_n| = |S_p|\} = \{p,\ 5,\ 7\},\ |S_p| = S_q - 30$$

를 만족시킬 때, $a_1 + a_{10}$의 값은? [4점]

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

18. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 O(0, 0), A(1, 2), B(0, 1), C(1, 0)을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 기울기가 t인 직선이 이등분할 때, 이 직선의 y절편을 $f(t)$라 하자. $f(a) = 0$를 만족시키는 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t} + \lim_{t \to 1} \frac{f(at)}{1-t}$의 값은? [4점]



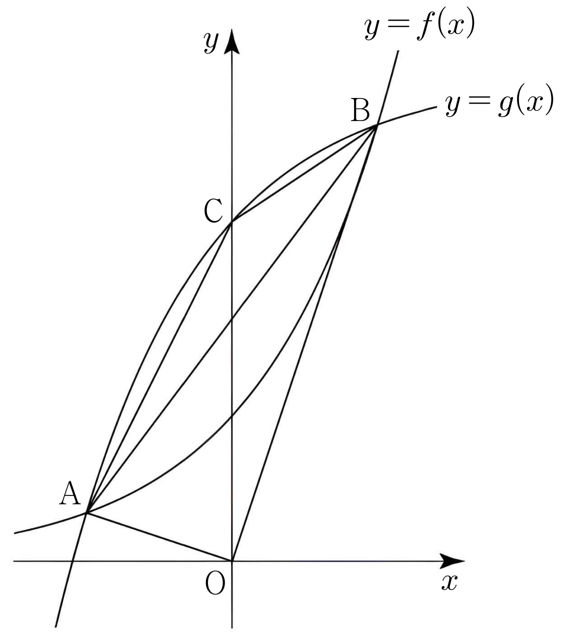
① $\frac{7-2\sqrt{10}}{4}$ ② $\frac{4-\sqrt{10}}{2}$ ③ $\frac{9-2\sqrt{10}}{4}$
④ $\frac{5-\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\frac{11-2\sqrt{10}}{4}$

19. 그림과 같이 두 곡선

$$f(x)=a^{x},\ g(x)=-\left(\frac{1}{a}\right)^{x}+k\ (k\text{는 } k>1\text{인 상수})$$

이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 곡선 $y=g(x)$가 y축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{2}{5}$배이고, 직선 AB의 기울기가 $\frac{4}{3}$일 때, 사각형 ACBO의 넓이는?

(단, $a>1$이고, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{20}{9}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{22}{9}$ ④ $\frac{23}{9}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

20. 실수 k와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} k(x-1) & (x<1) \\ f(x) & (x\ge 1) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(a_n)=g(n)$
(나) $a_n \le 1$
(다) $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{4} a_k$

$a_4=1$일 때, $\sum_{m=1}^{10} \frac{a_m-1}{m-1}$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① $-\frac{105}{2}$ ② -63 ③ $-\frac{315}{4}$ ④ -105 ⑤ $-\frac{315}{2}$

21. 두 자연수 $a(a \le 5)$, $b(b \le 8)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<0) \\ |x^2-bx+a| & (x \ge 0) \end{cases}$$

라 하자. 양수 t에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n = \lim_{h \to 0+} \{g(n+h)-g(n-h)\}$$

라 할 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k = -2$가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

단답형

22. 함수 $f(x)=x^3+3x$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 세 수 a, 7, b가 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 $2a$, 10, b가 순서대로 등차수열을 이룰 때, $4a^2+b^2$의 값은? [3점]

24. x에 대한 방정식 $4^x - 2^{x+\log_2 10} + 16 = 0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하자. $\alpha^3 + \beta^3$의 값을 구하시오. [3점]

25. $1 \le k \le 30$인 자연수 k에 대하여, $\log_2\left(\sin\frac{k\pi}{6}\right)$가 정수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 함수 $f(x) = x^2 - 4x$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = x^2 - 6x + k$이다.

27. 두 실수 p, q에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n = n!(pn+q)$$

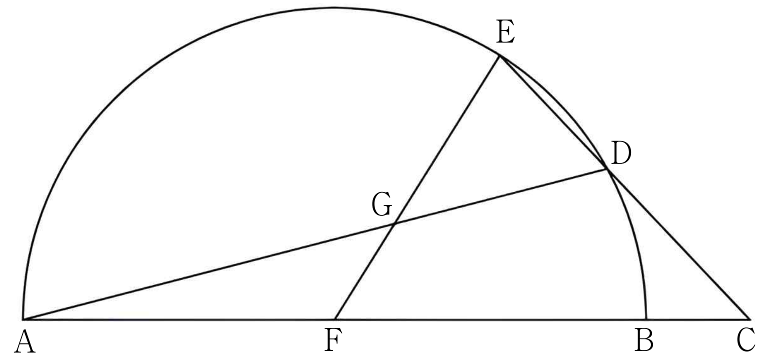
이다. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \times a_2 = 0$
(나) $\lvert a_1 \rvert + \lvert a_2 \rvert + \lvert a_3 \rvert = 24$

두 실수 p, q의 순서쌍 (p, q)에 대하여 모든 $2p+q$의 값의 곱을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반직선 AB 위의 점 C를 $\overline{\mathrm{AC}}=7$이 되도록 잡고, 반원 위의 점 D를 $\overline{\mathrm{CD}}=2$가 되도록 잡는다. 직선 CD가 반원과 만나는 점 중 D가 아닌 점을 E라 하자. 선분 AB의 중점을 F라 하고, 두 선분 AD, EF의 교점을 G라 하자. 선분 EG의 길이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x < \log_2(|t|+3)) \\ 2|t|+6-2^x & (x \ge \log_2(|t|+3)) \end{cases}$$

라 하자. $\log_2(t^2+1) \le x \le \log_2(t^2+8)$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 최솟값의 합을 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 미분가능하지 않도록 하는 모든 실수 α의 값을 작은 것부터 순서대로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$라 하자.

이때, $\sum_{k=1}^{m} g(\alpha_k)$의 값을 구하시오. [4점]

30. -2 이상 2 이하의 정수 $a\,(a \ne 0)$와 -4 이상 4 이하의 두 정수 $b,\ c$에 대하여 함수 $f(x)=(-1)^a \times x^3+ax+b$라 하고, 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge 0) \\ c+f(x) & (x < 0) \end{cases}$$

라 하자. -4 이상 4 이하의 정수 d에 대하여 두 곡선

$$y=\{g(x)-t-d\}^2,\ y=\frac{1}{2}-(x-t)^2$$

이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 모든 실수 t에 대하여 $h(t) \le 1$가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

수학 영역

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.