2015학년도 성식형 모의고사

제 2 교시 수학 영역

성명		수험 번호						2				

5지선다형

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $2A=X+B$를 만족하는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=\int_1^x (2t+\cos\pi t)dt$ 에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. $\sin\theta-\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, $\sin 2\theta$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

4. 좌표공간에서 두 점 A$(2,\ 1,\ 0)$, B$(1,\ 3,\ 2)$에 대하여 선분 AB를 xy평면 위에 정사영 시킬 때 만들어지는 선분의 길이는? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ 3

5. $\left(\sqrt{x}+\frac{a}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항이 60일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 등비수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여,

$$a_{n+1}-2a_n=3^{n-1}$$

을 만족시킨다고 할 때, a_4의 값은? [3점]

① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

7. 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=1,\ \lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=2$$

을 만족시킬 때, 함수 $y=f(g(x))$ 위의 점 $(2,\ f(g(2)))$에서 그은 접선이 x축 및 y축에 의해 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

8. 일차변환 f 와 두 2×1 행렬 A, B 에 대하여

$$f(A+2B)=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix},\ f(A-B)=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

가 성립한다. $f(A)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 을 만족하는 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

9. 독립사건 A, B 에 대하여

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2},\ P(A\cap B^C)=2P(A\cap B)\neq 0$$

일 때, $P(A|B^C)$ 의 값은? (단, B^C 는 B 의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

10. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대해 $\{(n+1)a_{n+1}\}^{n+1}=(4na_n)^n$ 을 만족시킨다.

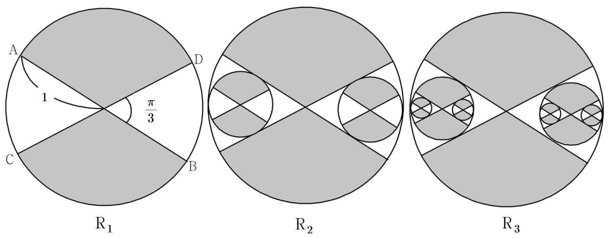
다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정을 나타낸 것이다.

> 주어진 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
> $(n+1)\log_2\{(n+1)a_{n+1}\} = n\log_2(na_n) + \boxed{(가)}$ 이다.
> $b_n=n\log_2(na_n)$이라 하면
> $b_1=0$이고, $b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$ 이다.
> 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
> $b_n=\boxed{(나)}$ 이므로,
> $n\log_2(na_n)=\boxed{(나)}$ 이다.
> 따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면
> $a_n=\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{g(7)\times h(8)}{f(6)}$ 의 값은? [3점]

① 32 ② 40 ③ 48 ④ 56 ⑤ 64

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위에 서로 $\frac{\pi}{3}$ 의 각을 이루도록 지름 AB와 CD를 그릴 때, 원이 선분 AB와 선분 CD에 의해 4등분 된 부채꼴 중 넓이가 더 큰 두 부채꼴을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 색칠되지 않은 두 부채꼴에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 이 두 원에 각각 선분 AB와 선분 CD에 평행한 두 지름을 그리고 각각 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 그림 R_2 에서 색칠되지 않은 네 부채꼴에 각각 내접하는 네 원을 그리고, 이 네 원에 각각 선분 AB와 CD에 평행한 두 지름을 그리고 각각 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_3 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠된 모든 도형의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [3점]



① $\frac{3}{4}\pi$　② $\frac{4}{5}\pi$　③ $\frac{5}{6}\pi$　④ $\frac{6}{7}\pi$　⑤ $\frac{7}{8}\pi$

12. 직선 $l : y=2x+2$ 가 원점을 중심으로 $\theta\,(0<\theta<2\pi)$ 만큼 회전하는 회전변환 f 에 의해 옮겨진 직선을 m 이라 하자. 직선 l 과 m 의 교점의 좌표가 $(0,\ 2)$ 라고 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{5}$　② $-\frac{3}{10}$　③ $-\frac{2}{5}$　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{3}{5}$

13. 토양의 건조도가 k 로 같은 두 지역 P, Q 에서의 식물의 군집도를 각각 N_P, N_Q 라 하고, 연평균풍속을 v_P, v_Q 라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 하자.

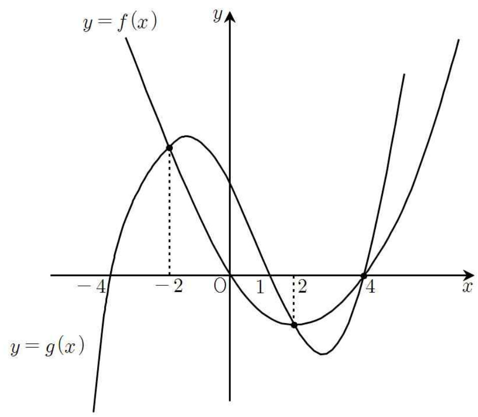
$$N_P = N_Q \times \left(\frac{v_P}{v_Q}\right)^{\frac{1}{k}}$$

토양의 건조도가 k_0로 서로 같은 A, B 두 지역에서 $\frac{N_A}{v_A} = \frac{3N_B}{v_B}$, $N_A = 9N_B$ 가 성립한다고 한다.

토양의 건조도가 $\frac{k_0}{2}$ 로 서로 같은 C, D 두 지역에서 $v_c = 12$, $N_C = 4N_D$ 가 성립할 때, v_D 의 값은?
(단, 풍속의 단위는 m/s 이다.) [3점]

① 6 ② $6\sqrt{2}$ ③ 12 ④ $12\sqrt{2}$ ⑤ 24

14. 그림은 최고차항의 계수가 양수인 이차 함수 $f(x)$와 삼차 함수 $g(x)$ 를 나타낸 것이다.



닫힌 구간 $[-5,\ 5]$에서 부등식 $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} \le 2$을 만족하는 정수 x의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

15. 두 이차 정사각행렬 A, B가

$$A^{-1}=B-E, \quad AB+BA=3A+B$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

보기

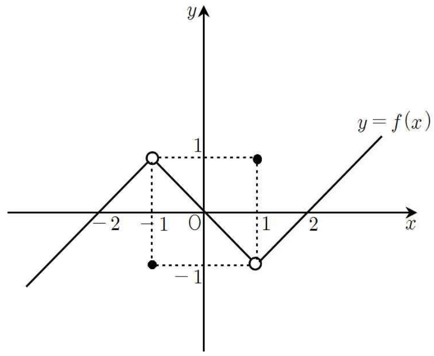
ㄱ. $AB=A+E$

ㄴ. $B=2E-A$

ㄷ. $(B-2E)^{10}=B-2E$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



보기

ㄱ. $\lim_{x\to -1} f(x)=1$

ㄴ. 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 모든 실수 x에 대해 연속이 되도록 하는 상수 a값이 총 3개 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 닫힌 구간 $[0,\ 2a]$ 에서 연속으로 정의된 확률변수 X 의 확률밀도 함수 $y=f(x)$ 가 $0 \le x \le a$ 인 모든 x 에 대해

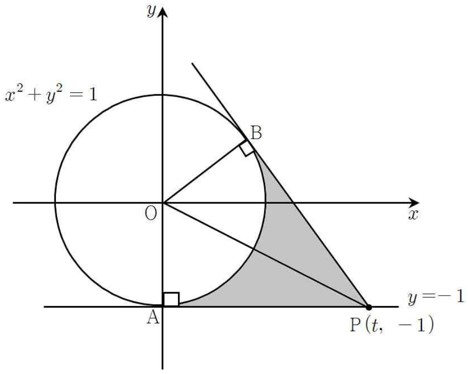
$$\int_{x}^{2x} f(t)\,dt = 6x^2+x$$

을 만족할 때, $f(a)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

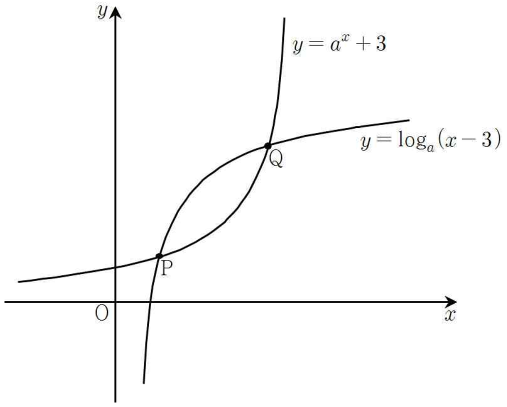
18. 그림과 같이 점 $(0,\ -1)$ 을 출발하여 직선 $y=-1$ 을 따라 x 좌표가 증가하는 방향으로 속력 1 로 이동하는 점 P 가 있다.

양수 t 에 대하여, 출발한지 t 초 후 점 P 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 대해 그은 두 접선이 원과 만나는 두 접점을 각각 A, B 라 하자. 선분 AP 와 선분 BP 와 호 AB 에 의해 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $S'(3)$ 의 값은? [4점]



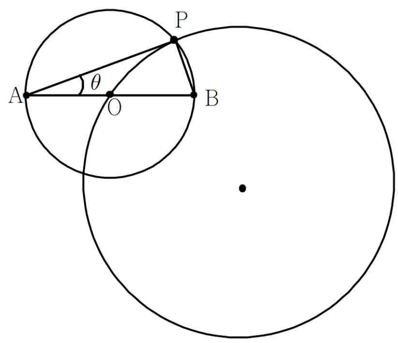
① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{11}{12}$ ③ $\frac{13}{14}$ ④ $\frac{15}{16}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

19. 그림과 같이 $a>0$인 상수 a에 대하여 지수함수 $y=a^x+3$과 로그함수 $y=\log_a(x-3)$이 두 점 P, Q에서 만난다고 할 때, $\overline{OP}:\overline{OQ}=1:2$이다. a의 값은? [4점]



① $3^{\frac{1}{8}}$　② $3^{\frac{1}{7}}$　③ $3^{\frac{1}{6}}$　④ $3^{\frac{1}{5}}$　⑤ $3^{\frac{1}{4}}$

20. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 $\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$가 되도록 점 P를 잡는다.
점 O를 지나고, P점에서 직선 AP에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때 $\lim_{\theta\to+0}\theta^2 S(\theta)$의 값은?
(단, O는 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심이다.) [4점]



① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ π　④ 2π　⑤ 4π

21. 좌표공간에서 구 C: $(x-3)^2+y^2+(z-3)^2=3$ 에 대해 직선 $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=z$ 을 포함하고 구 C에 접하는 두 평면을 각각 α, β 라 할 때, 평면 α, β 와 구 C의 접점을 각각 A, B 라 하자. $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 6 ② $2\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{11}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

단답형

22. 분수부등식 $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-3}\le 0$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 값의 합을 구하시오. [3점]

23. 부등식 $|x|+|y|+|z|\le 6$ 를 만족하는 0 이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하시오. [3점]

24. 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$에 대하여, 타원 밖의 한 점 $(0,\ k)$ $(k>0)$에서 타원에 대해 그은 두 접선이 이루는 각이 $\frac{\pi}{2}$일 때, k^2의 값을 구하시오. [3점]

25. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대해

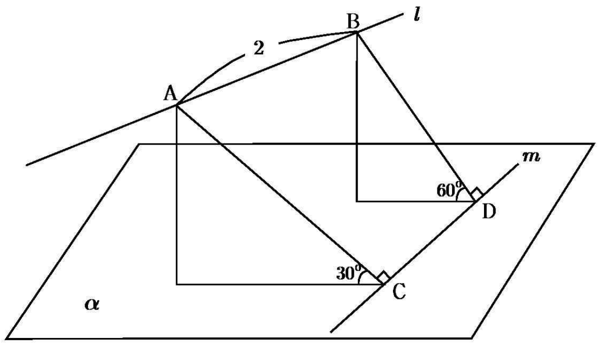
$$f(x)=2\sin x+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,dt$$

를 만족할 때, $\int_0^{3\pi}f(x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 좌표 공간상의 평면 α와 평면 α에 평행한 직선 l과 평면 α 위의 직선 m이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B에서 직선 m에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AB}=2$, $\overline{CD}=1$이고, 선분 AC와 평면 α가 이루는 각이 30°이고, 선분 BD와 평면 α가 이루는 각이 60°라고 한다.

이 때, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각을 θ에 대해 $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. 이때, pq의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이며, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영은 선분 CD와 만나지 않는다.) [4점]



27. 확률변수 X와 Y가 충분히 큰 수 n에 대하여 각각 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{5}\right)$과 $B\left(4n,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$P(X \leq k) = P(Y \geq k) = 0.9772$

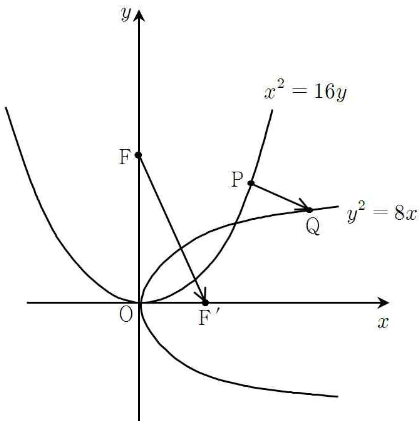
라고 할 때, $n+k$의 값을 구하시오. (단, 표준정규분포를 따르는 Z에 대해, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이다.) [4점]

28. 실수 t에 대해 관계식

$$\begin{cases} x = t^2 e^{-t} \\ y = (t-3)e^t \end{cases}$$

을 만족하는 xy평면 위의 점 (x, y)의 자취를 곡선 l이라 할 때, 원점에서 곡선 l에 대해 그은 접선의 기울기는 $-ae^b$이다.
$30(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a는 유리수이고, b는 정수이다.) [4점]

29. 좌표평면 위의 두 포물선 $x^2=16y$ 와 $y^2=8x$ 의 초점을 각각 F, F' 이라고 하자. 포물선 $x^2=16y$ 위의 점 P 와 $y^2=8x$ 위의 점 Q에 대해, 내적 $\overrightarrow{FF'}\cdot\overrightarrow{PQ}$가 최소가 될 때의 점 P, Q에 대해 $|\overrightarrow{PQ}|=k$ 이다. k^2 의 값을 구하시오. [4점]



30. 이차함수 $f(x)$에 대하여, 함수 $g(x)$가 다음을 만족한다.

(가) $f(x)=\ln g(x)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(3)\le g'(x)\le g'(2)$이다.
(다) x에 대한 방정식 $g(x)=mx-3e^2$의 실근의 개수를 $h(m)$이라 할 때, 함수 $h(m)$은 오직 $m=0$에서만 불연속이다.

위 조건을 만족하는 모든 $f(x)$에 대해 $\int_2^3 f(x)dx$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

✷ 정답 및 해설 ✷

문항	정답	배점	문항	정답	배점	문항	정답	배점	문항	정답	배점
1	②	2	9	⑤	3	17	④	4	25	16	3
2	④	2	10	④	3	18	①	4	26	21	4
3	①	2	11	④	3	19	③	4	27	128	4
4	③	3	12	⑤	3	20	①	4	28	110	4
5	②	3	13	②	3	21	⑤	4	29	65	4
6	③	3	14	①	4	22	9	3	30	58	4
7	②	3	15	⑤	4	23	160	3			
8	③	3	16	⑤	4	24	10	3			

1) 정답 ②

조건에 의하여 $X=2A-B=\begin{pmatrix}2 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$이므로 행렬 X의 모든 성분의 합은 2이다.

다른 풀이

A의 모든 성분의 합이 2이고, B의 모든 성분의 합이 2이므로 $X=2A-B$의 모든 성분의 합은 2이다.

[참고]
행렬 A의 모든 성분의 합이 a이고, 행렬 B의 모든 성분의 합이 b라고 할 때, 행렬 $xA+yB$의 모든 성분의 합은 $ax+by$이다.

2) 정답 ④

양변을 x에 대해 미분하면 $f'(x)=2x+\cos\pi x$이다.
$f(1)=0$이므로 미분의 정의에 의하여
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이고,
따라서 구하는 값은 $f'(1)=1$이다.

3) 정답 ①

양변을 제곱하면 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{8}{9}$이고,

배각 공식에 의해 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$이다.

4) 정답 ③

A는 xy평면 위의 점이고, B를 xy평면에 정사영시킨 점은 $(1,\ 3,\ 0)$이므로 구하는 길이는 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ 이다.

다른 풀이

$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 2)$와 xy평면의 법선벡터 $(0,\ 0,\ 1)$가 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 2)$와 xy평면과 이루는 각 α에 대하여

$\cos\alpha=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로 구하는 값은 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=\dfrac{5}{3}$ 이다.

5) 정답 ②

주어진 전개식에서의 상수항은 $\sqrt{x}$을 4개 택하고, $\dfrac{a}{x}$을 2개 택하는 경우이므로

$(\sqrt{x})^4\cdot\left(\dfrac{a}{x}\right)^2\cdot{}_6\mathrm{C}_2=15a^2$이다. 따라서 양수 a의 값은 2이다.

6) 정답 ③

수열 $\{a_n\}$이 공비가 r인 등비수열이라 하면, 수열 $\{a_{n+1}-2a_n\}$도 공비가 r인 등비수열이고 $r=3$이다. 따라서
$a_{n+1}-2a_n=3a_n-2a_n=a_n=3^{n-1}$이므로 $a_4=3^3=27$이다.
수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 수열 $\{a_{n+1}-2a_n\}$도 등비수열이다.
이 두 수열의 공비는 서로 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 공비도 3이다.
따라서 $a_n=a_1\cdot3^{n-1}$이고 $a_{n+1}-2a_n=a_1(3^n-2\cdot3^{n-1})=3^{n-1}$이므로 $a_1=1$
따라서 $a_4=1\times3^3=27$이다.

7) 정답 ②

함수 $y=f(g(x))$위의 점 $(2,\ f(g(2)))$에서 그은 접선의 방정식은 $y=f'(g(2))g'(2)(x-2)+f(g(2))$이다.
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-1}{x-2}=2$에서 $\lim\limits_{x\to2}g(x)=g(2)=1$ $(\because g(x)$는 연속함수$)$

이므로 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=2$이다.

마찬가지로 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+2}{x-1}=1$에서

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=-2$ $(\because f(x)$는 연속함수$)$,

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$이다.

$f'(g(2))=f'(1)=1$이고, $f(g(2))=f(1)=-2$이므로
구하는 접선의 방정식은 $y=1\cdot2(x-2)-2=2x-6$이다.
접선의 x절편은 3이고, y절편은 -6이므로 구하는 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot|3|\cdot|-6|=9$

출제자의 말

풀이 자체의 길이는 상당하지만 사실 $f(x)$의 함숫값, 미분계수, $g(x)$의 함숫값, 미분계수만 차분히 정리해 놓는다면 비교적 간단하게

풀 수 있는 유형입니다.

8) 정답 ③

일차변환의 성질에 의해

$3f(\mathrm{A})=f(\mathrm{A}+2\mathrm{B})+2f(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$이다.

따라서 $f(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이므로 $a+b=5$

9) 정답 ⑤

A와 B는 독립사건이므로 A와 B^C도 독립사건이다.

따라서 $P(A)\cdot P(B^C)=2P(A)\cdot P(B)\neq 0$이므로 $P(A)\neq 0$이고, $P(B^C)=2P(B)$이다.

$P(B^C)=1-P(B)$이므로, $P(B)=\frac{1}{3}$이다.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}P(A)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$이므로,

$P(A)=\frac{1}{4}$이다.

따라서 구하는 값은 $P(A|B^C)=P(A)=\frac{1}{4}$

($\because A$와 B는 독립사건)이다.

10) 정답 ④

$\log_2(4na_n)^n=n\log_2(4na_n)=n\log_2(na_n)+2n$이므로,

(가) $=2n$이다.

또한 $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k)=(n-1)n$이므로, (나) $=(n-1)n$이다.

따라서 $n\log_2(na_n)=(n-1)n$에서 $\log_2(na_n)=n-1$이므로,

(다) $=a_n=\frac{2^{n-1}}{n}$이다.

11) 정답 ④

그림에서 $S_1=\ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$ 이고,

$\frac{S_{n+1}}{S_n}=r=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 이므로,

구하는 값은 $\frac{S_1}{1-r}=\frac{6}{7}\pi$ 이다.

12) 정답 ⑤

직선 l이 회전변환 f에 의해 직선 m으로 옮겨졌으므로

직선 m위의 점 역변환 f^{-1}에 의해 직선 l로 옮겨진다.

따라서 교점 $(0,2)$은 직선 m위의 점이므로 변환 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$에 의해 직선 l위로 옮겨진다. 즉, 점 $(2\sin\theta, 2\cos\theta)$는 $y=2x+2$위의 점이다.

식 $4\sin\theta+2=2\cos\theta$의 양변을 제곱하여 정리하면,

$(\cos\theta-1)^2=4\sin^2\theta=4(1-\cos^2\theta)$에서, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ ($\because \cos\theta\neq 1$)

이다.

다른 풀이

그림에서 제 2 코사인법칙에 의해 $\cos(\pi-\theta)=\frac{5+5-4}{2\cdot\sqrt{5^2}}=\frac{3}{5}$

이므로 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$이다.

13) 정답 ②

$\frac{N_A}{v_A}=\frac{3N_B}{v_B}$, $N_A=9N_B$에서 $v_A=3v_B$이므로

$N_A=N_B\times\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^{\frac{1}{k_0}}$에서 $9=3^{\frac{1}{k_0}}$ 이므로 $k_0=\frac{1}{2}$ 이다.

$N_C=\left(\frac{v_C}{v_D}\right)^{\frac{2}{k_0}}\times N_D$ 에서 $4=\left(\frac{12}{v_D}\right)^4$ 이므로

$v_D=6\sqrt{2}$ 이다.

14) 정답 ①

$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{g(x)}{f(x)}\leq 2$ 을 정리하면

$\frac{\{f(x)-g(x)\}^2}{f(x)g(x)}\leq 0$ 이다.

즉, $f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)g(x)<0$ 일 때 실근을 갖는다.

(단, $f(x)g(x)\neq 0$)

$f(x)=ax(x-4)$ $(a>0)$, $g(x)=b(x+4)(x-1)(x-4)$ $(b>0)$

라 하면 $f(x)=g(x)$ 를 만족하는 실근 x 는 $x=-2,\ 2,\ 4$ 의 총 3 개이며, $x=4$ 는 $f(x)=g(x)=0$ 이므로 무연근이다.

$f(x)g(x)<0$ 는 $x<-4$ 또는 $0<x<1$ 또는 $1<x<4$ 이므로

닫힌 구간 $[-5,\ 5]$ 에서 부등식을 만족하는 정수 x 는 -5 의 1 개 뿐이다.

따라서, 구하는 정수 x 는 $x=-5,\ -2,\ 2$ 의 총 3 개다.

15) 정답 ⑤

$A^{-1}=B-E$ ……(i)

$AB+BA=3A+B$ ……(ii)

ㄱ. (i)식의 양변에 행렬 A를 곱하면

$AB-A=BA-A=E$ 이므로 $AB=A+E$ (참)

ㄴ. ㄱ에 의해

$AB=BA=A+E$ 이므로 (ii) 식에 대입하면

$2(A+E)=3A+B$, $B=2E-A$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 $B-2E=-A$ 이므로

$(B-2E)^{10}=B-2E$

$(-A)^{10}=-A$

ㄴ을 ㄱ에 대입하면 $A(2E-A)=A+E$, $A^2-A+E=0$

좌변에 $A+E$를 곱하면

$A^3=-E$ 이므로 $A^{10}=-A$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

16) 정답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} f(x) = 1$이므로 참.

ㄴ. $x=1$에서의 함숫값은 $f(f(1)) = f(1) = 1$이고,
$x=1$에서의 극한값은 $f(x)=t$로 치환하면
$\lim_{x\to1} f(f(x)) = \lim_{t\to -1+0} f(t) = 1$이므로 참.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 $x=-1,1$이다.
불연속인 점에 곱하여 연속이 되도록 하는 방법은
(불연속)$\times$(0)또는 (불연속)$\times$(불연속)이 있다.
따라서 $f(x-a)$는 $x=-1,1$에서 0 또는 불연속이다.
$f(x-a)=0$인 점은 $x=a-2, a, a+2$이고, $f(x-a)$가 불연속인 점은 $x=a-1, a+1$이다.
$a=1$일 때, 함수 $f(x)f(x-1)$가 각각 $x=-1,0,1,2$에서 0으로 연속이고,
$a=0$일 때, 함수 $f(x)f(x)$가 각각 $x=-1,1$에서 0으로 연속이고,
$a=-1$일 때, 함수 $f(x)f(x+1)$가 각각 $x=-2,-1,0,1$에서 0으로 연속이므로
조건을 만족하는 상수 a값은 $a=-1,0,1$ 총 3개이다.

17) 정답 ④

$$\int_x^{2x} f(t)\,dt = 6x^2+x$$

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt = 6\left(\frac{x^2}{4}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{x}{4}}^{\frac{x}{2}} f(t)\,dt = 6\left(\frac{x^2}{16}\right)+\left(\frac{x}{4}\right)$$

…

…

양변을 모두 더하면

$\int_0^{2x} f(t)\,dt = \frac{6x^2}{1-\frac{1}{4}} + \frac{x}{1-\frac{1}{2}} = 8x^2+2x$ 이므로

$\int_0^{2a} f(t)\,dt = 8a^2+2a = 1$ 이다. $\therefore a=\frac{1}{4}$ 이다. ($\because a \geq 0$)

$\int_0^{x} f(t)\,dt = 2x^2+x$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x)=4x+1$, $f(a)=2$ 이다.

18) 정답 ①

$\angle POA=\theta$ 라 하면,

$s(t) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot t\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(2\theta) = t-\theta$ 이므로

$s'(t) = 1-\frac{dt}{d\theta}$ 이다. $\frac{dt}{d\theta}$ 를 구하기 위해 t 와 θ 의 관계식에서

$\tan\theta = t$ 이다

양변을 t 에 대하여 미분하면 $\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=1$, $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{t^2+1}$

$\therefore s'(3) = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

출제자의 말

6월 평가원에 빈 칸 문항으로 변화율이 출제되었으므로, 수능에도 출제될 가능성이 있지 않을까 합니다.

19) 정답 ③

$y=a^x+3$ 과 $y=\log_a(x-3)$ 은 역함수관계이므로 점 P, Q 는 $y=x$ 위의 점이다.
점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α,β 라 하면 $\overline{OP}:\overline{OQ} = \sqrt{2}\alpha:\sqrt{2}\beta = 1:2$ 이므로 $\beta=2\alpha$ 이다.
$a^\alpha+3=\alpha$ $a^\beta+3=\beta$ 이므로, $a^{2\alpha}+3=2\alpha=2(a^\alpha+3)$
$a^\alpha=X$ 라 하면 $X^2-2X-3=0$ 이므로 $X=a^\alpha=3(\because a^\alpha>0)$,
$\alpha=a^\alpha+3=6$ 이므로 $a^6=3$

따라서 $a=3^{\frac{1}{6}}$

20) 정답 ①

삼각형 APO는 $\overline{AO}=\overline{AP}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle PAO = \angle APC$, $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\angle OPB = \angle APB - \angle APO = \frac{\pi}{2}-\theta$ 이다. P 점에서 직선 AP 에 접하는 원의 중심을 Q 라 하면 $\angle APQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로 Q 는 직선 PB 위에 있다.

삼각형 POQ 는 $\overline{OP}=\overline{OQ}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle POQ = \angle OPQ = \angle OPB = \frac{\pi}{2}-\theta$ 이고,

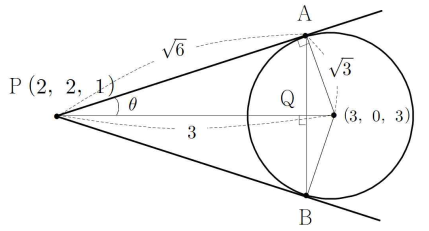
$\angle PQO = 2\theta$ 이다. 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{OP}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{PQ}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ 이고

$S(\theta) = \overline{PQ}^2\pi$ 이므로,

$\lim_{\theta\to+0}\theta^2 S(\theta) = \lim_{\theta\to+0}\theta^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin 2\theta}\right)^2\pi = \frac{\pi}{4}$ 이다.

21) 정답 ⑤

직선을 포함하는 평면을 생각함에 있어서는 직선의 방향벡터 방향에서 바라보는 것이 바람직하다.
(2, 2, 1) 를 법선벡터로 하고, 구 C 의 중심을 지나는 평면의 그림은 다음과 같다.



$\angle APQ = \theta$ 라 하면 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $\overline{PQ} = 2$ 이다.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OQ} = 2(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ})$ 이고, $\angle OPQ = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}|\ 2\sqrt{3^2+2^2} = 2\sqrt{13}$ 이다.

22) 정답 9

$\dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} \le 0$ 에서 $x < 1$ 또는 $3 < x \le 5$ 이므로

부등식을 만족하는 자연수는 4, 5 이다.

따라서 모든 자연수 x 값의 합은 9 이다.

23) 정답 160

$|x| = a,\ |y| = b,\ |z| = c$ 라 하면

$a+b+c \le 6$ 을 만족하는 자연수 $a,\ b,\ c$ 의 순서쌍 개수는

$a+b+c+d = 3$ 을 만족하는 0 이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 순서쌍의 개수와 같으므로 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$ 개다.

따라서, $|x| = a,\ |y| = b,\ |z| = c$ 에서 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 의 개수는

$20 \times 2 \times 2 \times 2 = 160$ 개다.

24) 정답 10

기울기가 m 인 타원의 접선의 방정식 $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ 에서

기울기가 1 인 접선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k = \sqrt{9+1}$ $(\because\ k > 0)$ 이고

따라서 구하는 값은 10 이다.

25) 정답 16

$\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)dt = k$ 라 하면

$f(x) = 2\sin x + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,dt$ 에서

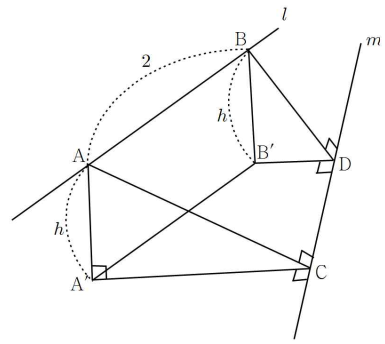
$k = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi}\left(2\sin x + \dfrac{k}{2\pi}\right) = \dfrac{k}{2} + 4$

$\therefore\ k = 8$ 이므로 $f(x) = 2\sin x + \dfrac{4}{\pi}$ 이다.

따라서 구하는 값은

$\displaystyle\int_0^{3\pi} f(x)dx = \int_0^{3\pi}\left(2\sin x + \dfrac{4}{\pi}\right)dx = 4 + 12 = 16$

26) 정답 21



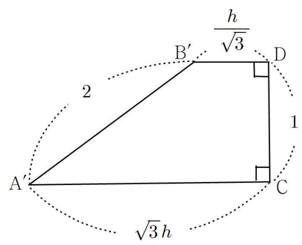
점 A, B를 평면 α 에 정사영시킨 점을 각각 A′, B′이라 하면

$\overline{BD} \perp m$ 이고, $\overline{BB'} \perp \alpha$ 이므로 $\overline{B'D} \perp m$ 이다.

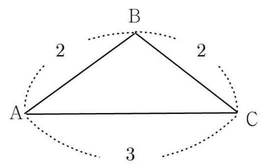
마찬가지로 $\overline{AC} \perp m$, $\overline{AA'} \perp \alpha$ 이므로 $\overline{A'C} \perp m$ 이다.

직선 l 은 평면 α 와 평행하므로 $\overline{AA'} = \overline{BB'} = h$라 하면

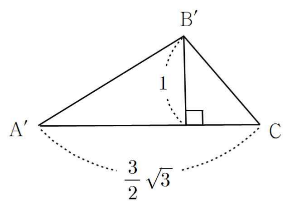
사각형 A′B′DC 는 그림과 같다.



$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = 2$이므로 삼각형 ABC는 아래 그림과 같고 넓이는 $\dfrac{3}{4}\sqrt{7}$이다.



삼각형 A′B′C′는 아래 그림과 같으므로 넓이는 $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$이다.



따라서 $\cos^2\theta = \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2}{\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{7}\right)^2} = \dfrac{3}{7}$이므로 $p = 7,\ q = 3$ 이다.

$\therefore\ pq = 21$

27) **정답** 128

확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{5}n,\ \left(\frac{2}{5}\sqrt{n}\right)^2\right)$, $\mathrm{N}\left(\frac{2}{5}n,\ \left(\frac{3}{5}\sqrt{n}\right)^2\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}\left(X \le \frac{1}{5}n + \frac{2}{5}\sqrt{n} \cdot 2\right) = \mathrm{P}\left(Y \ge \frac{2}{5}n - \frac{3}{5}\sqrt{n} \cdot 2\right) = 0.9772$이다.

$k = \frac{1}{5}n + \frac{4}{5}\sqrt{n} = \frac{2}{5}n - \frac{6}{5}\sqrt{n}$이므로 $n = 100,\ k = 28$이다.

$\therefore$ 구하는 값은 128이다.

28) **정답** 110

$\frac{dx}{dt} = (2t - t^2)e^{-t},\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t}e^{2t}$

원점에서 곡선 l에 대해 그은 접선의 방정식을 $y = mx$, 접점을 $\left(t^2e^{-t}, (t-3)e^t\right)$이라 하면

$m = \frac{(t-3)e^t}{t^2e^{-t}} = \frac{dy}{dy} = -\frac{1}{t}e^{2t}$이므로 $t = \frac{3}{2},\ m = -\frac{2}{3}e^3$

$a = \frac{2}{3}, b = 3$

$\therefore 30(a+b) = 110$

다른 풀이

원점에서 곡선 l에 대해 그은 접선의 접점을 $(x_1, y_1) = \left(t_1^2e^{-t_1},\ (t_1 - 3)e^{t_1}\right)$이라 하면

접선의 방정식은 $y = -\frac{1}{t_1}e^{2t_1}(x - t_1^2e^{-t_1}) + (t_1 - 3)e^{t_1}$이고, 이 접선이 원점을 지나므로

$(2t_1 - 3)e^{t_1} = 0,\ t_1 = \frac{3}{2}$이다.

따라서 구하는 기울기는 $-\frac{2}{3}e^3,\ a = \frac{2}{3}, b = 3$

$\therefore 30(a+b) = 110$

29) **정답** 65

$\overrightarrow{\mathrm{FF'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{FF'}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{FQ}} - \overrightarrow{\mathrm{FP}})$이다. 직선 $\mathrm{FF'}$의 기울기가 -2이므로 $\overrightarrow{\mathrm{FF'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FP}}$가 최대가 되는 점 P와 $\overrightarrow{\mathrm{FF'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FQ}}$가 최소가 되는 점 Q는 모두 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$가 되는 점이다. $x^2 = 16y$를 x에 대해 미분하면 $2x = 16\frac{dy}{dx}$이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$일 때, $x = 4, y = 1$이고, $y^2 = 8x$를 x에 대해 미분하면 $2y\frac{dy}{dx} = 8$이므로, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$일 때, $y = 8,\ x = 8$이다.

따라서 구하는 점 P와 Q는 각각 (4, 1), (8, 8)이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$이고, 구하는 값은 65이다.

다른 풀이

P$(a,\ b)$, Q$(c,\ d)$라 하면 $a^2 = 16b, d^2 = 8c$, $\overrightarrow{\mathrm{FF'}} = (2, -4)$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (c - a,\ d - b)$이고,

$\overrightarrow{\mathrm{FF'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$= 2(c - a) - 4(d - b) = 2\left(\frac{d^2}{8} - a\right) - 4\left(d - \frac{a^2}{16}\right)$

$= \left(\frac{a^2}{4} - 2a\right) + \left(\frac{d^2}{4} - 4d\right)$

이므로

$a = 4,\ d = 8$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{FF'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FQ}}$는 최소이다.

$a^2 = 16b,\ d^2 = 8c$이므로, $b = 1,\ c = 8$이고,

따라서 P(4, 1), Q(8, 8)이므로, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$에서 구하는 값은 65이다.

30) **정답** 58

조건 (가)에 의해 $g(x) = e^{f(x)}$이고, 양변을 미분하면

$g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$이고,

$g''(x) = \{(f'(x))^2 + f''(x)\}e^{f(x)}$이다.

조건 (나)에 의해 함수 $g'(x)$는 $x = 2$일 때 최대, $x = 3$일 때 최소이므로 $g''(2) = g''(3) = 0$이다.

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ 라 하면,

$g''(x) = (4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 2a)e^{f(x)}$이고,

$g''(x)$의 실근이 $x = 2, 3$이므로,

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 2a = 4a^2(x-2)(x-3)$이다.$(\because e^{f(x)} \neq 0)$

x의 계수를 비교하면 $4ab = -20a^2 \Leftrightarrow b = -5a$이고,

상수항을 비교하면 $b^2 + 2a = 24a^2 \Leftrightarrow a = -2, b = 10$이다.

함수 $g(x)$ 위의 임의의 점 $(t, g(t))$에서 그은 접선의 y절편을 $i(t)$라 하면

$i(t) = g(t) - tg'(t)$이므로, $t = 2$일 때 $i(t)$는 극소이자 최솟값 $-3e^{f(2)}$을 가진다.

(다) 조건에 의해 점 $(0, -3e^2)$에서 $y = g(x)$에 변곡 접선이 아닌 접선은 그을 수 없어야 하므로

모든 t에 대해 $-3e^2 \le i(t)$를 만족해야 하며, 따라서

$-3e^2 \le -3e^{f(2)}$이다.

$f(x) = -2(x-2)(x-3) + c + 12$이고, $f(2) \le 2$이므로,

$c \le -10$이다.

따라서 $\int_2^3 f(x)dx$의 최댓값은

$-2\int_2^3 (x-2)(x-3)dx + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$.이다.

$p = 3,\ q = 7$이므로 구하는 값은 $p^2 + q^2 = 58$이다.